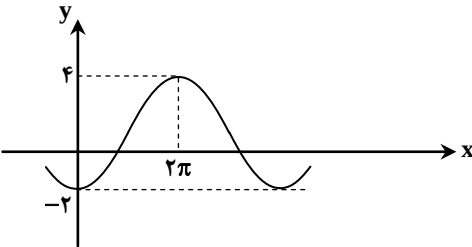
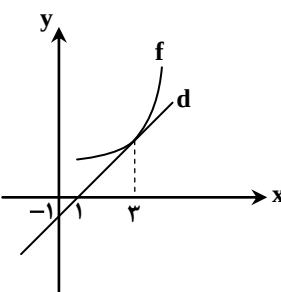


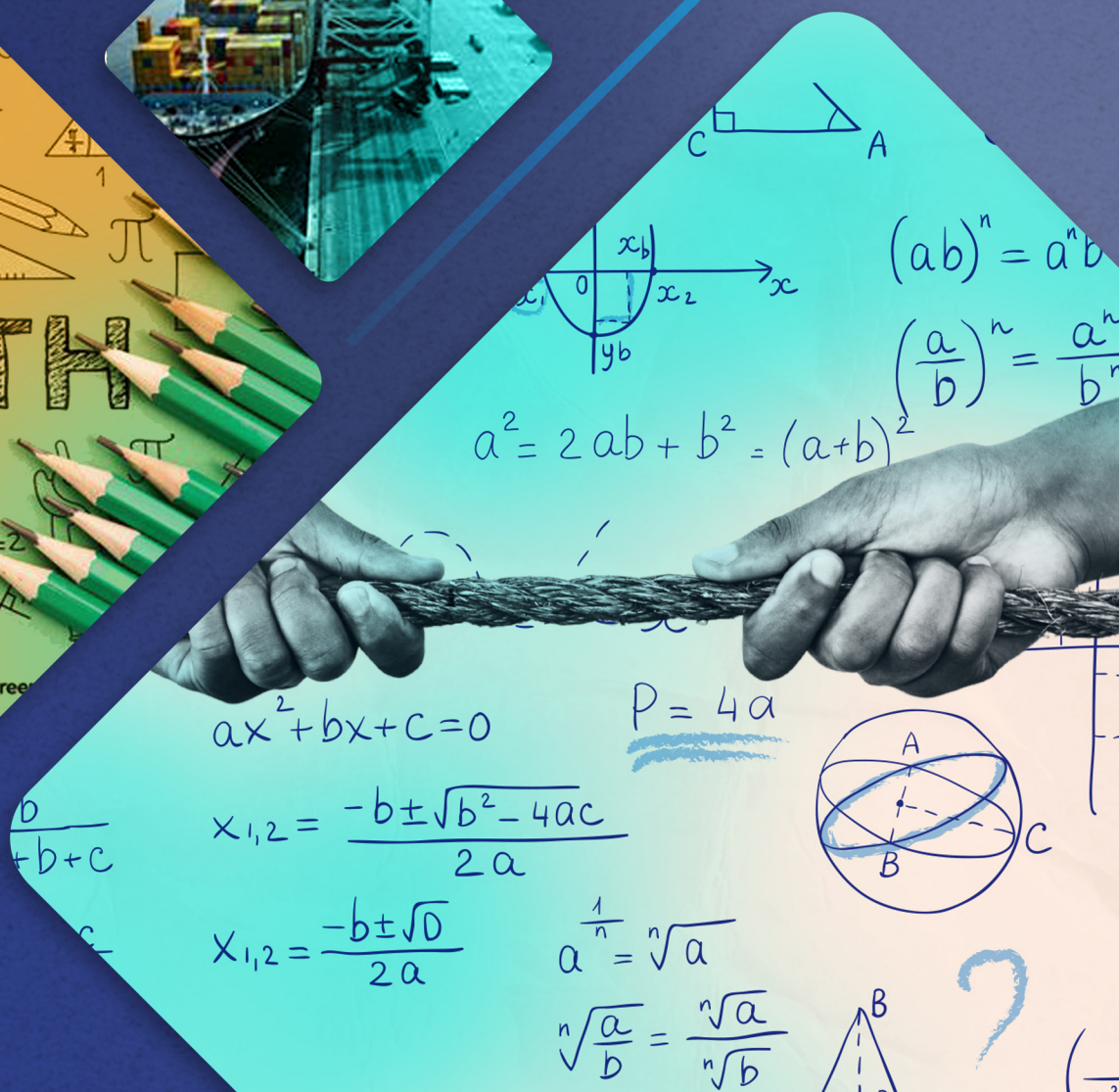
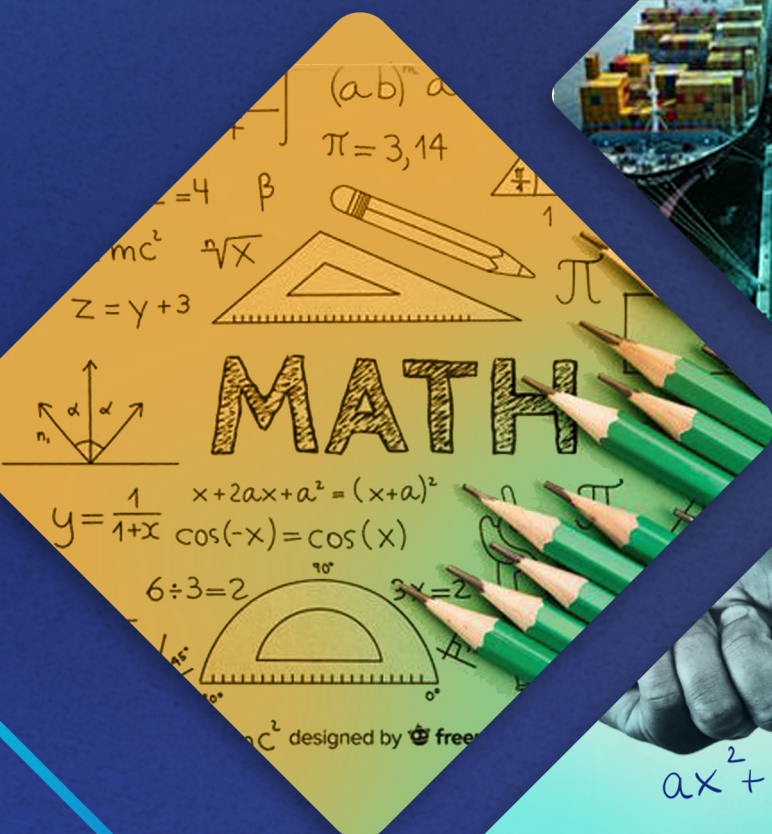
ردیف	نمره	
۱	۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) تابع $y = -\log_{\sqrt{5}} x$ روی دامنه اش اکیداً صعودی است. ب) اگر $f(2) = 4$ و $g(4) = 2$ باشند، آن گاه $(g \circ f)(2) = 2$. پ) تابع $y = \tan x$ در بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ اکیداً صعودی است. ت) بازه $(2, 3)$ یک همسایگی برای عدد $\sqrt{5}$ است.
۲	۱	جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید. الف) تابع $f(x) = ax + 3x - 2a$ هم صعودی و هم نزولی است. مقدار a برابر است. ب) با فرض $f(x) = x + \sqrt{x}$، مقدار $(f^{-1} \circ f)(25)$ برابر است. پ) اگر $8 \sin 2x \cos 2x = 3$ باشد، آن گاه مقدار $\sin 4x$ برابر است. ت) باقی مانده تقسیم $2 - 2x^2 + x^3 - 4x^4 + x^5$ بر $f(x) = x + 1$ برابر است.
۳	۱/۵	گزینه درست را انتخاب کنید. الف) اگر نقطه $A(3, -6)$ روی تابع $y = f(x)$ باشد، متناظر آن روی تابع $y = 1 - \frac{1}{2}f(3x)$ کدام است؟ (۱) $(1, 4)$ (۲) $(9, 4)$ (۳) $(1, -10)$ (۴) $(9, -10)$ ب) اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a-2)x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$، عدد غیرصفر b باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟ (۱) $3/5$ (۲) 2 (۳) $2/5$ (۴) 4 پ) با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه نادرست است؟ (۱) $f'(3) < f'(1)$ (۲) $f'(3) - f'(1) > 0$ (۳) $f'(3) \cdot f'(1) < 0$ (۴) $f'(1) - f'(3) > 0$ 
۴	۱/۲۵	الف) نمودار تابع $f(x) = -(x+1)^3 + 1$ را رسم کنید. ب) نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم کنید. پ) وضعیت اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی بودن تابع $y = f(x)$ را در بازه های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ مشخص کنید.
۵	۱/۷۵	توابع $f(x) = 4 - \sqrt{x-2}$ و $g(x) = x^2 + 3$ مفروض اند. الف) دامنه تابع $f \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) ضابطه تابع $(f \circ g)(x)$ را تشکیل دهید.
۶	۱	نمودار تابع $y = f\left(\frac{3}{2x-1}\right)$ را یک واحد به سمت چپ می آوریم و سپس طول نقاط نمودار حاصل را دو برابر می کنیم و در نهایت نمودار حاصل را نسبت به محور عرض ها قرینه می کنیم. با انجام مراحل انتقال، ضابطه تابع به دست آمده را بنویسید.
۷	۱/۵	الف) ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = 3 - \sqrt{4-x}$ را به دست آورید. ب) اگر $g(2) = 3$، حاصل $(f^{-1} \circ g^{-1})(3)$ را به دست آورید.
۸	۱	تابع $y = 2m \sin(mnx) - n$ مفروض است. اگر ماکزیمم و مینیمم تابع برابر ۶ و -۴ باشند: الف) تمام مقادیر ممکن برای m را به دست آورید. ب) دوره تناوب تابع را به دست آورید.

ردیف	نمره	
۹	۱/۲۵	شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin bx + c$ یا $y = a \cos bx + c$ است. با محاسبه مقادیر a، b و c ضابطه تابع را بنویسید. 
۱۰	۰/۷۵	مقدار $\cos 22/5^\circ$ را به دست آورید.
۱۱	۱/۵	جواب های کلی معادله مثلثاتی $\cos 4x = 3 \sin 2x - 1$ را به دست آورید.
۱۲	۳/۲۵	حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4}$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x x - 2}{2x^2 + x(x-1)}$
۱۳	۰/۷۵	اگر $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2[x] + 2k}{x^2 - 3x} = +\infty$ باشد، حدود k را به دست آورید.
۱۴	۱	مطابق شکل، خط d در نقطه ای به طول $x = 3$ بر تابع f مماس است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f(x) - 6}{x - 3}$ را به دست آورید. 
۱۵	۱/۵	با تعریف مشتق، مقدار مشتق تابع $f(x) = x^2 + 3x$ را در $x = -1$ به دست آورید.

دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۲

ریاضی ۳ (رشته علوم تجربی)

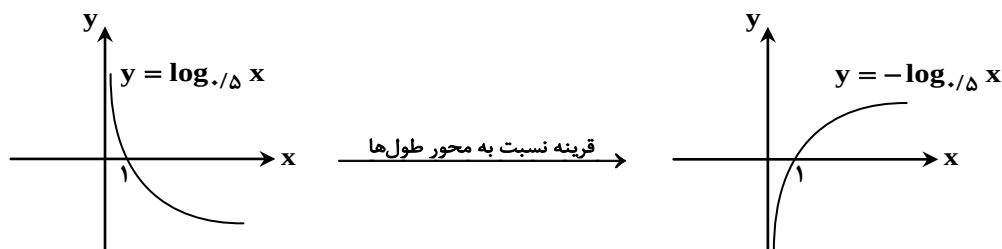


الف) درست

نکته ۱: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ ، آن گاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

نکته ۲: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$ ، آن گاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

تابع $y = \log_{\Delta} x$ اکیداً نزولی است، پس تابع $y = -\log_{\Delta} x$ که قرینه آن نسبت به محور طول‌هاست، اکیداً صعودی است.



ب) درست

نکته: اگر f و g دو تابع باشند به طوری که برد تابع f و دامنه تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(g \circ f)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع $g \circ f$ را تابع مرکب می‌نامیم به عبارت دیگر:

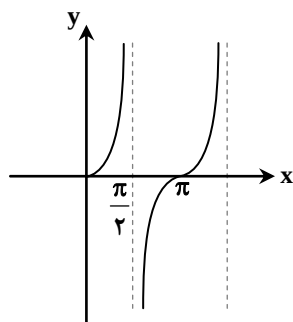
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 2$$

پ) نادرست

نکته: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ ، آن گاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ ، تابع در این بازه غیریکنوا است.



ت) درست

نکته: هر بازه باز شامل عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم؛ به عبارت دیگر اگر $x_0 \in (a, b)$ ، آن گاه بازه (a, b) یک همسایگی x_0 می‌باشد.

چون $\sqrt{5} \in (2, 3)$ ، پس این بازه یک همسایگی برای $\sqrt{5}$ است.

الف) ۳-

نکته ۱: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، آن گاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.

نکته ۲: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$ ، آن گاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.

تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است؛ بنابراین باید ضریب x برابر صفر باشد:

$$f(x) = (a+3)x - 2a \xrightarrow{\text{ثابت } f} a+3=0 \Rightarrow a=-3$$

ب) ۲۵

نکته: اگر f تابعی وارون پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم:

$$f(f^{-1}(x)) = x ; x \in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x ; x \in D_f$$

از آنجا که $25 \in D_f$ ؛ بنابراین $(f^{-1} \circ f)(25) = 25$



پ) $\frac{3}{4}$

نکته: برای محاسبه سینوس دو برابر یک زاویه داریم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

طرفین رابطه $\sin 2x \cos 2x = \frac{3}{4}$ را بر 4 تقسیم می کنیم:

$$2 \sin 2x \cos 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin 4x = \frac{3}{4}$$

ت) -2

نکته: در تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر دوجمله ای درجه اول $(x-a)$ ، باقی مانده تقسیم برابر $f(a)$ است.

مقدار $f(-1)$ همان باقی مانده است؛ بنابراین:

$$f(-1) = 1 - 4 + 1 + 2 - 2 \Rightarrow r = -2$$

-3

الف) گزینه 1

برای رسم تابع $y = 1 - \frac{1}{4}f(2x)$ باید طول نقاط را در $\frac{1}{4}$ ضرب کنیم. سپس عرض نقاط را قرینه و $\frac{1}{4}$ برابر کرده و یک واحد به آن ها اضافه کنیم.

$$A(3, -6) \in f \Rightarrow A'(3 \times \frac{1}{4}, -(-6) \times \frac{1}{4} + 1) \Rightarrow A'(1, 4)$$

ب) گزینه 4

نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله ای از درجه n به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیر صفر است. در این صورت:

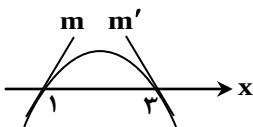
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n$$

چون حاصل حد عدد غیر صفر b است، پس باید صورت و مخرج هم درجه (هم توان) باشند. مخرج درجه دوم است پس باید صورت نیز درجه دوم باشد؛ بنابراین:

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a + b = 4 \end{cases}$$

پ) گزینه 2

می دانیم شیب خط مماس در هر نقطه برابر مشتق تابع در آن نقطه است. بنابراین: $f'(1) = m > 0$ و $f'(3) = m' < 0$



گزینه 1: $f'(3) < f'(1)$ ✓

- +

گزینه 2: $f'(3) - f'(1) > 0$ ✗

- +

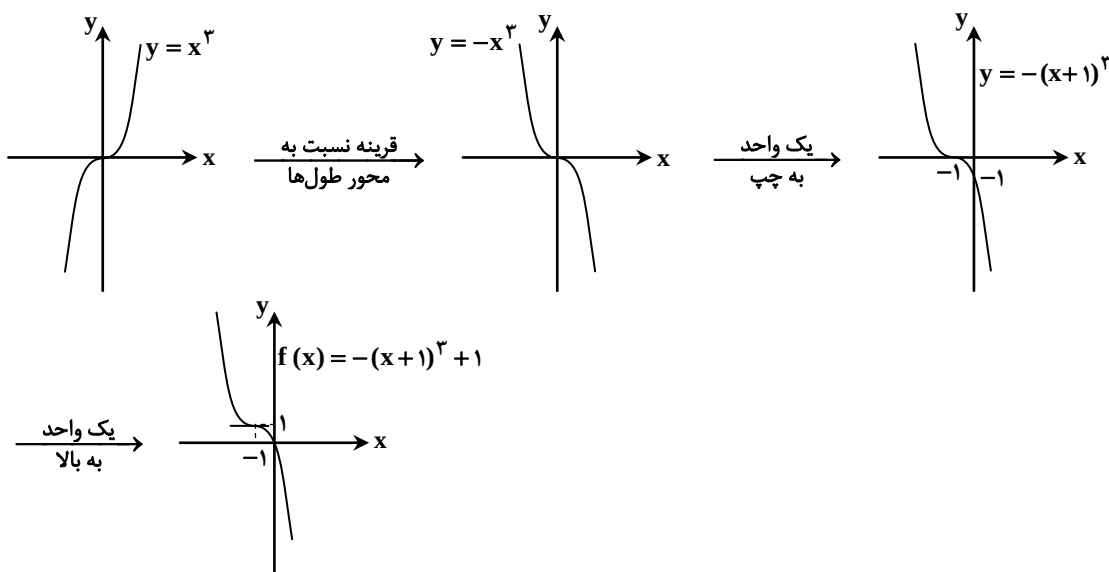
گزینه 3: $f'(3) \cdot f'(1) < 0$ ✓

- +

گزینه 4: $f'(1) - f'(3) > 0$ ✓

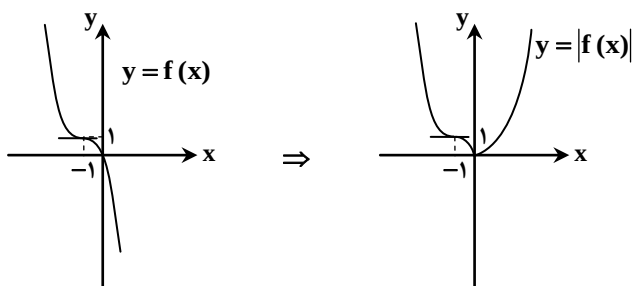
+ -

الف) نمودار تابع $y = x^3$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کرده و سپس یک واحد به چپ و یک واحد به بالا می‌بریم تا نمودار $f(x) = -(x+1)^3 + 1$ به دست آید.



(ب)

نکته: برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور x ‌هاست، قرینه نمودار f را نسبت به محور x ‌ها رسم کنیم.



(پ)

نکته ۱: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ ، آن‌گاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

نکته ۲: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$ ، آن‌گاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

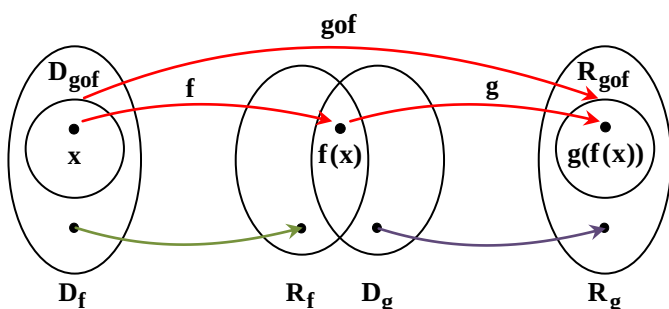
با توجه به نمودار تابع $y = |f(x)|$ ، تابع در بازه $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی و در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

(الف)

نکته: دامنه تابع مرکب $g \circ f$ مجموعه x ‌هایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱- x در دامنه f قرار داشته باشد.

۲- $f(x)$ در دامنه g قرار داشته باشد.





بنابراین دامنه تابع $g \circ f$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به صورت مشابه دامنه تابع $f \circ g$ به صورت زیر است:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

ابتدا دامنه تابع f را به دست می آوریم:

$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$$

اکنون داریم:

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \underbrace{\left\{x \in [2, +\infty) \mid 4 - \sqrt{x-2} \geq 2\right\}}_{(1)}$$

$$4 - \sqrt{x-2} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x-2} \leq 2 \xrightarrow[\text{توان 2}]{x \geq 2} x - 2 \leq 4 \Rightarrow x \leq 6 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow 2 \leq x \leq 6 \Rightarrow D_{f \circ f} = [2, 6]$$

(ب)

نکته: اگر f و g دو تابع باشند به طوری که برد تابع f و دامنه تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(g \circ f)(x)$ نمایش می دهیم و تابع $g \circ f$ را تابع مرکب می نامیم به عبارت دیگر:

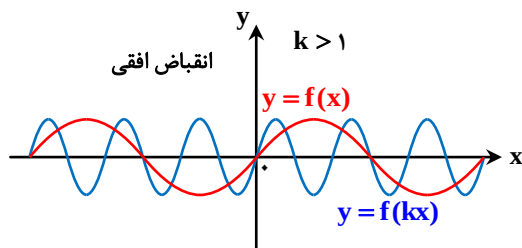
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2) = 4 - \sqrt{(x^2 + 2) - 2} = 4 - \sqrt{x^2 + 1}$$

-۶

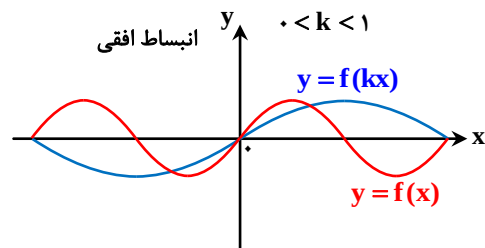
نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k > 0$ ، نمودار $y = f(kx)$ را می توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور x ها به دست آورد.

اگر $k < 0$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور y ها قرینه می شود، سپس با ضرب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به طور افقی منبسط یا منقبض می شود.



اگر $k > 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضرب $\frac{1}{k}$ فشرده می شود که در این حالت می گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.



اگر $0 < k < 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضرب $\frac{1}{k}$ کشیده می شود که در این حالت می گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.

مراحل انتقال را به ترتیب انجام می دهیم:

$$y = f\left(\frac{3}{2x-1}\right) \xrightarrow{x \rightarrow x+1} y = f\left(\frac{3}{2(x+1)-1}\right) = f\left(\frac{3}{2x+1}\right) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{x}{2}} y = f\left(\frac{3}{\frac{x}{2}+1}\right) = f\left(\frac{3}{\frac{x}{2}+1}\right) \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = f\left(\frac{3}{-x+1}\right)$$

قرینه نسبت به محور عرض ها

-۷

(الف)

نکته: برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم. راه حل اول:

ابتدا x را برحسب y محاسبه می کنیم و سپس با تبدیل y به x ، ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم:

$$y = 3 - \sqrt{4-x} \Rightarrow \sqrt{4-x} = 3-y \xrightarrow[y \leq 3]{3-y \geq 0} 4-x = (3-y)^2 \Rightarrow x = 4 - (3-y)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = 4 - (3-x)^2 = -x^2 + 6x - 5 \quad ; \quad x \leq 3$$



راه حل دوم:

ابتدا x و y را با هم جابه جا می کنیم و سپس با محاسبه y بر حسب x ، ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم:

$$x = 3 - \sqrt{4-y} \Rightarrow \sqrt{4-y} = 3-x \xrightarrow{x \leq 3} 4-y = (3-x)^2 \Rightarrow y = 4 - (3-x)^2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 4 - (3-x)^2 = -x^2 + 6x - 5 \quad ; \quad x \leq 3$$

(ب)

نکته: اگر f تابعی وارون پذیر باشد، آن گاه:

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

می دانیم:

$$g(2) = 3 \Rightarrow g^{-1}(3) = 2$$

حال داریم:

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(3) = f^{-1}(g^{-1}(3)) = f^{-1}(2) = -4 + 12 - 5 = 3 \Rightarrow (f^{-1} \circ g^{-1})(3) = 3$$

-۸

نکته: توابع $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ ، مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

الف) با توجه به ضابطه تابع $y = 2m \sin(mnx) - n$ داریم:

$$\begin{cases} \max = |2m| - n = 6 \\ \min = -|2m| - n = -6 \end{cases} \xrightarrow{+} -2n = 2 \Rightarrow n = -1$$

بنابراین:

$$|2m| + 1 = 6 \Rightarrow |2m| = 5 \Rightarrow m = \pm \frac{5}{2}$$

ب) با توجه به رابطه $T = \frac{2\pi}{|b|}$ داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|mn|} = \frac{2\pi}{\frac{5}{2}} = \frac{4\pi}{5}$$

-۹

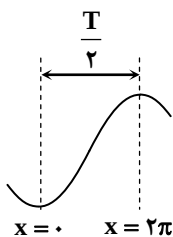
نکته: توابع $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ ، مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

با توجه به شکل، نمودار داده شده مربوط به تابع $y = a \cos bx + c$ است، زیرا مینیمم تابع روی محور عرض ها قرار دارد. از طرفی شکل، قرینه نمودار تابع $y = \cos bx$ است، پس $a < 0$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \max = |a| + c = 4 \\ \min = -|a| + c = -2 \end{cases} \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow |a| = 3 \xrightarrow{a < 0} a = -3$$

از طرفی نصف دوره تناوب تابع برابر 2π است پس دوره تناوب تابع برابر 4π است و داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow \frac{1}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$



پس ضابطه تابع به صورت $y = -3 \cos(\pm \frac{1}{2}x) + 1$ است.

-۱۰

نکته: برای محاسبه کسینوس دو برابر یک زاویه داریم:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

با فرض $2\alpha = 45^\circ$ و $\alpha = 22.5^\circ$ داریم:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos 45^\circ = 2\cos^2 22.5^\circ - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2\cos^2 22.5^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}+2}{2} = 2\cos^2 22.5^\circ$$

$$\xrightarrow{\div 2} \frac{\sqrt{2}+2}{4} = \cos^2 22.5^\circ \xrightarrow{\cos 22.5^\circ > 0} \cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

نکته ۱: برای محاسبه کسینوس دو برابر یک زاویه داریم:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

نکته ۲: جواب های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

با توجه به رابطه $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ معادله را حل می کنیم:

$$\cos 2x = 2\sin^2 x - 1 \Rightarrow 1 - 2\sin^2 2x = 2\sin^2 x - 1 \Rightarrow 2\sin^2 2x + 2\sin^2 x - 2 = 0$$

با فرض $\sin 2x = t$ و $-1 \leq t \leq 1$ داریم:

$$2t^2 + 2t - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=25} t = \frac{-2 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \checkmark \\ t = -2 \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

(الف)

نکته: در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$ ، اگر $f(a) = g(a) = 0$ ، نتیجه می گیریم که چندجمله ای های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x-a)$

بخش پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x-a)$ ، تابع گویای دیگری حاصل می شود که حد آن در نقطه a ، در صورت

وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

در اینجا حد صورت و مخرج کسر در $x = -1$ برابر صفر است. پس باید عامل $x+1$ در صورت و مخرج ظاهر شود. برای تجزیه صورت، آن را بر $x+1$ تقسیم می کنیم:

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 1 \quad | \quad x+1 \\ -(x^3 + x^2) \quad \quad \quad x^2 + x - 1 \\ \hline \quad \quad x^2 - 1 \\ \quad \quad -(x^2 + x) \\ \quad \quad \quad \quad -x - 1 \\ \quad \quad \quad \quad -(-x-1) \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

اکنون حاصل حد را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 + x - 1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 1}{x} = 1$$

(ب)

نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$

در نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

در اینجا حد صورت و مخرج کسر برابر صفر است. پس باید عامل $x-2$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. برای این کار صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x^2 - 4)(x + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x + \sqrt{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x+2)(x + \sqrt{x+2})} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$



(پ)

نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجه n به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n$$

ابتدا دقت می‌کنیم که وقتی $x \rightarrow -\infty$ آن‌گاه $|x| = -x$ اکنون داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x|x| - 2}{2x^2 + x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 - 2}{2x^2 + x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

-۱۳

نکته: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، در این صورت:

الف) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

پ) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

ت) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ابتدا داریم:

$$x \rightarrow 3^- \Rightarrow [x] = [3^-] = 2$$

اکنون داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2[x] + 2k}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{6 + 2k}{x(x-3)} = \frac{6 + 2k}{3(0^-)} = \frac{6 + 2k}{0^-} = +\infty$$

چون در همسایگی چپ $x = 3$ ، مخرج کسر با مقادیر منفی به صفر میل می‌کند پس باید صورت کسر عددی منفی باشد، تا جواب حد برابر $+\infty$ شود؛ بنابراین:

$$6 + 2k < 0 \Rightarrow 2k < -6 \Rightarrow k < -3$$

-۱۴

نکته: شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

به شرط آن که این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ابتدا شیب خط d را به دست می‌آوریم و سپس معادله آن را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} (1, 0) \in d \\ (0, -1) \in d \end{cases} \Rightarrow m_d = \frac{0+1}{1-0} = 1 \Rightarrow y = x - 1$$

خط d در $x = 3$ بر تابع f مماس است؛ بنابراین داریم:

$$y = x - 1 \xrightarrow{x=3} y = 2 \Rightarrow f(3) = 2$$

حال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f(x) - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(f(x) - 2)}{x - 3} = 3 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 3f'(3)$$

پس حاصل حد برابر $3f'(3)$ است. از طرفی شیب خط مماس d در نقطه $x = 3$ همان $f'(3)$ است؛ بنابراین حاصل حد برابر است با:

$$m_d = 1 \Rightarrow 3f'(3) = 3 \times 1 = 3$$

نکته ۱: حد زیر را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می نامند و با $f'(a)$ نمایش می دهند، یعنی:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

نکته ۲: مشتق تابع f در نقطه $x = a$ برابر است با:

راه حل اول:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \xrightarrow{f(-1) = -2} f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+2) = 1 \end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \xrightarrow{f(-1) = -2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 + 2(-1+h) + 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 2h + 1 + 2h - 2 + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+1) = 1 \end{aligned}$$